

1997 年度 大阪大学 後期理系第 2 問

自然数  $n$  に対して, 関数  $f_n(x) = x^n e^{1-x}$  と, その定積分  $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  を考える. ただし,  $e$  は自然対数の底である. 次の問いに答えよ.

(1) 区間  $0 \leq x \leq 1$  上で  $0 \leq f_n(x) \leq 1$  であることを示し, さらに  $0 < a_n < 1$  が成り立つことを示せ.

(2)  $a_1$  を求めよ.  $n > 1$  に対して,  $a_n$  と  $a_{n-1}$  の間の漸化式を求めよ.

(3) 自然数  $n$  に対して, 等式

$$\frac{a_n}{n!} = e - \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) いかなる自然数  $n$  に対しても,  $n!e$  は整数とならないことを示せ.

+追加問題

(5)  $e$  が無理数であることを示せ.