

1999 年度 慶應義塾大学理工学部

縦の長さが自然数 m ，横の長さが自然数 n の板 R_{mn} がある．縦の長さ 2，横の長さ 1 の長方形のタイル A と，縦の長さ 1，横の長さ 3 の長方形のタイル B の二種類のタイルを縦横の向きは変えずに用いて，板 R_{mn} をぴったり覆うように貼り詰めたい（たとえば，図の斜線部に A は貼れない）．もしこれが可能なら，実は A ， B どちらか一種類のタイルだけで貼り詰められることが次のようにして証明できる．

R_{mn} を縦横の長さが 1 の正方形 $m \times n$ 個のます目に分割し，上から s 番目，左から t 番目のます目には $(-1)^s \omega^t$ を記入する．ここで， ω は $\omega^3 = 1$ ， $\omega \neq 1$ をみたす複素数である．

(1) A ， B どちらのタイルであってもその一枚を R_{mn} のます目に合わせて貼れば，覆われたます目に記入された複素数の和は貼った場所によらず常に 0 であることを示しなさい．

(2) R_{mn} を A ， B のタイルによって貼り詰めることができれば， A ， B どちらか一種類のタイルだけで貼り詰められることを示しなさい．

