

2009 年度 東京慈恵会医科大学 第 3 問

関数  $f(x)$  は実数全体で定義されている.

$f(x)$  が次の条件①および②をみたすとき,  $f(x)$  を求めたい.

条件①: すべての実数  $x, y$  について,  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$  が成り立つ.

条件②: 微分可能な関数である.

すなわち, すべての実数  $a$  について微分係数  $f'(a)$  が定まる.

以下の設問(A)および(B)の(1), (2), (3), (4)に答えよ.

(A)で述べられた結果は(B)で用いてよい.

(A) 関数  $f(x)$  が条件①をみたすとき, 次の命題(A.1), (A.2)が成り立つことを証明せよ.

必要ならば  $0 = a + (-a)$  であることを用いよ.

(A.1) ある実数  $a$  について  $f(a) = 0$  ならば, すべての実数  $x$  について  $f(x) = 0$  である.

(A.2) すべての実数  $a$  について  $f(a) \neq 0$  ならば,  $f(0) = 1$  である.

(B) 関数  $f(x)$  が条件①および②をみたし, かつ  $0$  を値にとらないとする.

(1) すべての実数  $x$  について  $f(x) > 0$  であることを, 背理法によって証明せよ.

必要ならば「微分可能な関数は連続である」ことを用いよ.

(2)  $x = a$  における微分係数  $f'(a)$  の定義の式を記せ.

(3) すべての実数  $x$  について

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

であることを示せ.

(4)  $f'(0) = k$  とする. 不定積分  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$  を考えることにより  $f(x)$  を求め,  $k$  を用いて表せ.