

2007 年度 青山学院大学 経済学部第 4 問

実数 $a > 0$ に対して $f(a) = \frac{1}{a}$ と表すとき、以下の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} > f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(2) $0 < a < b$, $0 < w < 1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$wf(a) + (1-w)f(b) > f(wa + (1-w)b)$$

(3) $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ のとき、 $n \geq 2$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i) > f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right)$$

このことを数学的帰納法で証明せよ。