

1993 年度 九州工業大学 改題 (添付図省略)

xyz 空間内で次式で表される立体 A について考える.

$$A : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq 1$$

(1) 部分積分を用いて $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) を示せ.

(2) xy 平面上の曲線 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) は, 媒介変数 t ($0 \leq t \leq 2\pi$) を用いて,

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \text{ と表すことができる.}$$

この曲線で囲まれた部分の面積が, $\frac{3}{8}\pi a^2$ であることを示せ.

(3) 立体 A の体積を求めよ.