

2013年 大阪大学 理学部挑戦枠専門数学第2問

円周率を  $\pi$  とする. 正の整数  $n$  に対し

$$a_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1-x^{4n}}{1+x^2} dx$$
$$b_n = \int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{1+x^{4n+2}}{1+x^2} dx$$

とおく.

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi}{12}$  を証明せよ.

(2)  $3.141 < \pi < 3.142$  を証明せよ. ただし

$$1.7320508 < \sqrt{3} < 1.7320509$$

である.