【積分を用いた求積法】

積分計算を実際の図形にイメージを重ねて，さまざまな求積をミスなく実行できるようになろう．

☆求積の立式

・原則

・弧長(曲線の長さ)

・面積（x積分）

・面積（y積分）

・体積（非回転体の基本）

・体積（回転体の基本）

①x軸回りをxで積分

②y軸回りをyで積分

③y軸回りをxで積分　x軸回りをyで積分
（バウムクーヘン積分※個人的には年輪積分と呼んだ方が誤解を生まない気がする）

・体積（ややこしいときの積分手順の基本）

立体（3 次元）より平面（2 次元）の方が考えやすい．ということは？

①立体の重ね合わせ

②立体の通過範囲

（例題 1）$x^2+z^2 \leq a^2$，$y^2+z^2 \leq a^2$の共通部分の体積 V を求めよ．

（例題 2）$x^2+y^2 \leq 1$，$y^2 \leq z \leq 1$ の共通部分の体積 V を求めよ．

（例題 3）$x^2+z^2 \leq 1$，$y=1$ で表される図形をz軸の周りに一回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

※パップスギュルダンの定理（範囲外）

①　(回転体の表面積 S) ＝ (曲線 C の重心 G が回転により描く軌跡の長さ) × (曲線 C の長さ s)

平面上にある有界な曲線 C の長さをsとし，C と同じ平面上にあり C と共有点を持たない軸lの周りで
C を一回転させた回転面の面積を S とする．回転させる曲線 C の重心 G から回転軸lまでの距離をgとしたとき，
S ＝ $2\pi gs$
が成り立つ．

②　(回転体の体積 V) ＝ (図形 D の重心 G が回転により描く軌跡の長さ) × (図形 D の面積 S)

平面上にある図形 D の面積を S とし，D と同じ平面上にあり D を通らない軸lの周りで
D を一回転させた回転体の体積を V とする．回転させる図形 D の重心 G から回転軸lまでの距離をgとしたとき，
V ＝ $2\pi gS$
が成り立つ．

☆物理量と微積分

・時間と対応

▼速度　▼位置（変位）　▼道のり（延べの変位）

一般に，ある物理量を時刻tで微分すると，その時刻における変化量（速度）が求まる．

（例題 1）$y=x^2$を y 軸の周りに回転させてできる容器に時刻 $t=0$ から$\frac{dV}{dt}=\pi$ の割合で注水する．

(1) $t=2$ のときの水の深さを求めよ．
(2) $t=2$ のときの水面の上昇速度を求めよ．
(3) $t=2$ のときの水面の面積の増加速度を求めよ．

（発展）微分方程式

（例題 2）底面積 S の円筒型の容器の底に断面積 a の排水口がある．
この容器の高さ h まで水が満たされているとき，排水口を開けて容器が空になるまでの時間を求めよ．
ただし，水の深さがxのとき，排水口から流出する水の速さは$\sqrt{2gx}$で表されるとする．

☆媒介変数表示と微積分

・媒介変数表示の曲線に関する面積（it’s automatic）

（発展）極方程式における面積計算

$0 \leq r \leq f(\theta)$ $(\alpha \leq \theta \leq \beta)$の通過領域の面積

いつでも基本は同じ

（例題）曲線C：$\begin{cases} x = e^{-\theta}cos\theta \\ y = e^{-\theta}sin\theta \end{cases}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$を考える．Cとx軸で囲まれた領域の面積Sを求めよ．

☆斜回転体の体積計算

xy平面において，放物線$y=x^2$と直線$y=x$によって囲まれた図形を直線$y=x$の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

（解法 1）クソ真面目にやる

xy平面において，放物線$y = x^2$と直線$y = x$によって囲まれた図形を直線$y = x$の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

（解法 2）傘型分割（とんがりコーン，ロケット鉛筆，……）