【積分・積分法 integral and integration】

高校で学ぶ積分法に関する全ての知識をまとめておこう．

微分と積分の統合

微分と積分は本来互いに独立して定義された概念である．歴史的には微分は接線の傾き，積分は関数のグラフと座標軸等の直線が囲む図形の面積としてとらえられて発展してきた．そうした独立した概念を基本定理によって統合したのが，ニュートンでありライプニッツである．よって，歴史的には積分は求積法であり，不定積分よりも定積分の生まれの方が早い．高校数学では微分の逆演算として，不定積分から入りそこから定積分を定義するが，それは歴史的経緯とは異なる．ここでは，極力歴史をなぞる形で初めに高校数学の積分をざっと俯瞰するが，混乱を避けるために，具体的な解説は不定積分から定積分への流れで進める．

☆微積分学の基本定理

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

$$\left\{\int_a^x f(t)dt\right\}' = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

☆無限小の取り扱い　dxと Δx

☆無限小はハサミウチの略記

☆区分求積法 Quadrature by Parts（概要）

これが本来の定積分の定義.
不定積分に上端下端の値を入れて原始関数の差をとったものが定積分の定義ではない.

（本当はちょっと違う）

☆区分求積法 Quadrature by Parts（証明）

積分を微分の逆演算と定義するなら，区分求積法，つまり等分割した短冊の和の極限が積分となることは未定義なので証明すべきである．そして，高校数学で証明できる．（平均値の定理を使うので若干インチキではある…何がインチキかと言うと 19 講にて平均値の定理は既に証明したが，その際に最大値の定理を証明なしに用いている）

☆定積分と不定積分の定義

定積分は, 求積法として発明された. そして, 不定積分は, 微分の逆演算として新たな意味を持つものである.

・定積分の定義

・不定積分の定義

☆不定積分　indefinite integral

不定積分 $\neq$ 原始関数

積分とは微分の逆演算である，微分のように常に一意に定まるものではない．定義通りに不定積分した関数の総称を不定積分と呼ぶ．微分すれば元の関数に戻る関数を原始関数と呼ぶ．微分で消える定数項部分が積分定数としてついてくるために，一意に定まらないわけだが，不定積分と原始関数では取り扱いが異なるため，本来は同じものではない．しかし，一般には不定積分は原始関数を書いておけばよいことになっている．

・不定積分の基本公式

(i)（1）$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

（2）$\int\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

(ii)（1）$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$（$n \in \mathbb{R}$，$\mathrm{n} \neq -1$，※$n = -1$ のとき $\to (7)$）

（2）$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

（3）$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

（4）$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

（5）$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

（6）$\int e^x dx = e^x + C$

（7）$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

・置換積分法（合成関数の積分）

変数を置換（x世界 → t世界）
変化率の違いを被積分関数に反映（世界が変われば形も変わる）

・部分積分法

☆定積分 definite integral

定積分は本来，面積（体積）の計算方法であり，面積（体積）の定義そのものでもあるが，教科書風に原始関数を用いて微分の逆演算の延長線上に定義してみる．

$f(x)$の原始関数の１つを$F(x)$として，$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

※微分の逆演算としての定積分の計算が面積になっていることを確認

本来，求積法として定積分を定義しているはずなので，積分で求積が可能であることを確認するのはおかしいが，原始関数を用いた定積分の定義によって面積が求まることを確認しておく．

・定積分の基本公式

(1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ （特に$a=b$のときは$\int_a^a f(x)=0$）

(2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ （どんな変数で積分しても同じ）

(3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ （kは定数，$k=0$でも成立）

(4) $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

一般に，kとlを定数として

$\int_a^b \{kf(x) \pm lg(x)\}dx = k\int_a^b f(x)dx \pm l\int_a^b g(x)dx$　が成り立つ．

(5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ （a，b，c の大小関係は任意）

(6) $\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f\big(h(x)\big)h'(x) - f\big(g(x)\big)g'(x)$

・定積分の置換積分法

関数$f(x)$が閉区間$\left[a,\ b\right]$で連続，関数$g(x)$が微分可能，$\alpha = g(a)$，$\beta = g(b)$ならば，$t = g(x)$として

$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$ が成り立つ．

変数を置換（x世界 → t世界）

変化率の違いを被積分関数に反映（世界が変われば形も変わる）

区間も対応させる（形が変われば区間も変わる）

本質的なイメージ……同じ面積のまま，より簡単なグラフに書き直す

※置換積分の作業手順

・定積分の部分積分法

☆定積分と不等式

・被積分関数と定積分の大小関係

(1)$[a,\ b]$で，$f(x) \geq 0$ ならば，$\int_a^b f(x)dx \geq 0$
(2)$[a,\ b]$で，$f(x) \geq g(x)$ならば，$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

・外と中の絶対値

$a \leq b$のとき，$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

・区間で挟んで簡易評価

・階段状に挟んで評価

・積分の平均値の定理

関数$f(x)$が閉区間$\left[a,\ b\right]$で連続なら

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ （$a < c < b$）となるcが少なくとも 1 つは存在する．

・シュワルツの不等式再考

<u>Σ Ver.</u> $\left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right)^2$

等号成立は，$\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\vec{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ が一次従属のとき.
（$\vec{x}$と$\vec{y}$が一次従属：$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}=\vec{0}$ が $\alpha=\beta=0$ 以外でも成り立つ）

<u>∫ Ver.</u> $\left(\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2\,dx\right) \geq \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$

等号成立は，$f(x)=0$ もしくは$g(x)=\mu f(x)$ となる実数 μ が存在するとき.

☆積分と漸化式

・$\int (log x)^n dx$

・$\int sin^n x dx$，　$\int cos^n x dx$

・$\int tan^n x dx$

☆対称性と周期性を利用した積分

・対称積分

被積分関数$f(x)$が「偶関数」あるいは「奇関数」のときは

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \cdots\ f(x)\text{が偶関数のとき} \\ 0 & \cdots\ f(x)\text{が奇関数のとき} \end{cases}$$

である．

※偶関数と奇関数

・周期関数と積分

$f(x)$を周期pの周期関数とすると

(i) $\int_{np}^{np+a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$

$\int_b^{b+p} f(x)dx = \int_0^p f(x)dx$（$a$，$b$：実数）

(ii) $\int_0^{np} f(x)dx = n\int_0^p f(x)dx$（$n$：整数）

(iii) $\int_0^p f(mx)dx = \int_0^p f(x)dx$（$m$：自然数）

・（発展）区間の中心でＩを叫ぶ 線対称でＩは不変（理論）

・(発展) 区間の中心でⅠを叫ぶ 点対称で消えゆくⅠ (理論)

・（発展）区間の中心でＩを叫ぶ（例題）

「単独でＩが求まらないときに，中心で叫んでペアを作る」

(i)　$I=\int_{-1}^{1}\frac{e^{x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$

(ii)　$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sinx}{sinx+cosx}dx$

「ひとつに重なり消えてゆくＩを利用」

(iii)　$I=\int_{0}^{\pi}xf(sinx)dx$ を　$\int_{0}^{\pi}f(sinx)dx$ で表せ．

・（さらに発展）中心でＩを叫ばない非対称なペア（例題）

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{sinx}{\sqrt{3}sinx+cosx}dx$$

☆積分の具体的技巧

・部分積分の一般技法　$\int f(x)g(x)dx$

（その 1)「微分脳積分」(微分から逆算して修正する方法）

イメージ重視の思考の省エネ．積分脳を使わない．ただし，手首の物理的運動の省エネになる保証はない．

※$f(x)$が多項式（微分でいつか消える）かつ$g(x)$に$logx$（微分でx^{-1}を生み出す）が混じっていないとき
さらに機械的に部分積分できる．

（その 2)「USA 積分」テーブル法

徹底して機械的な処理に落とし込んだ方法. ほぼ完全に思考を放棄して計算できるが, 手首の運動量は増える．

（その 3)「ホモ積分」現在一般に瞬間部分積分法と呼ばれている方法

ホモ・サピエンスとして最低限の知性を持っているなら，普通に部分積分を一発でやるのが一番早い．

（三角関数 / 指数対数関数）の積分の基本

・三角関数の n 乗

$sin^n x$, $cos^n x$

$tan^n x$

※ウォリス積分

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = I_n$（$n$は 2 以上の整数） とすると、

(1)nが奇数のとき$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$

(2)nが偶数のとき$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

・log がらみ合成関数

・e^x・多項式　インスタント積分

（ホモ積分で十分だが，受験的には覚えておくとより省エネになる）

①$\int f \cdot e^x dx = e^x(f - f' + f'' - f''' + \cdots)$

②$\int f \cdot e^{-x} dx = -e^{-x}(f + f' + f'' + f''' + \cdots)$

・$e^x \cdot sinx$, $e^x \cdot cosx$

頻出パターン再確認

・三角関数

$$\int tanxdx$$

$$\int \frac{dx}{tanx}$$

$$\int \frac{dx}{cos^2x}$$

$$\int \frac{dx}{sin^2x}$$

$$\int \frac{dx}{sinxcosx}$$

$$\int \frac{dx}{sinx}$$

$$\int sin5xsin3xdx$$

$$\int tan^2xdx$$

～面積に帰着～

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$$

$$\int_0^\pi sinxdx$$

$$\int_0^\pi |sinax|\,dx = \int_0^\pi |cosbx|\,dx$$

（a，b：自然数）

・特殊な置換

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \sqrt{a-bx^2}dx$$

（発展）双曲線関数にもとづく置換（誘導付きで出題されるはずなので覚える必要はないが知ってると気が楽）

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\int \sqrt{x^2+1}dx$$

・合成関数を見抜く(…ということは置換してもうまくいく)

・$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$

・$\int x\sqrt{2x^2+1}dx$

・$\int xe^{x^2}dx$