【導関数（微分）・微分法 derivative(differential) and differentiation】

多項式で使い方だけ練習した微分法の基礎理論を学ぼう.

☆微分とは

「微分する」とは詳細を調べる（分析する）ことであり、詳細とは変化率のことである. ある点（$x = a$）における変化率のことを微分係数と呼び、微分係数を一般化したものを導関数（微分）と呼ぶ.

☆導関数の定義

導関数とは，ある関数の微分係数を x の関数で表したもの.

☆連続と微分可能性についての定理

ある区間で微分可能な関数はその区間において連続である. しかしこの逆はなりたたない.

☆微分法の基本

(1) $(c)' = 0$　(c は定数)

(2) $\{\mathrm{k}f(x)\}' = \mathrm{k}f'(x)$　(k は定数)

(3) $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$　(複合同順)

(4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　(積の微分法)

(5) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$　$(g(x) \neq 0)$ (商の微分法)

☆合成関数の微分法 (連鎖律)

$y = f(u)$, $u = g(x)$の導関数をそれぞれ$\dfrac{dy}{du}$, $\dfrac{du}{dx}$とするとき、合成関数$y = f(g(x))$の導関数$\dfrac{dy}{dx}$は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で与えられる.

・陰関数の微分法

陰関数と陽関数

☆高次導関数

第１次導関数（１階微分)：傾き（変化率）
第２次導関数（２階微分)：凹凸（変化率の変化率）

※合成関数（パラメータ）のとき注意

☆自然対数の底（ネイピア数 Napier’s constant）

$e =$

オイラーによる定義：

・$exp(x)$

特に e を底とした指数関数のことを狭義において単に指数関数と呼ぶことがある.

☆指数・対数関数の微分法

(1) $(e^x)' = e^x$

(2) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

(3) $(a^x)' = a^x \log a$　（ただし(2)，(3)の対数の底は e とする）

☆x^nの微分法

☆三角関数の微分法

(1) $(\sin x)' = \cos x$

(2) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

定義より導け.

☆平均値の定理

・ロルの定理

関数$f(x)$が，閉区間$[a,\ b]$で連続，開区間$(a,\ b)$で微分可能であるとき，$f(a)=f(b)$ならば

$$f'(c)=0\ \ (a<c<b)$$

となる c が少なくとも 1 つは存在する．

・平均値の定理（ラグランジュ）

関数$f(x)$が，閉区間$[a,\ b]$で連続，開区間$(a,\ b)$で微分可能であるとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\ \ (a<c<b)$$

となる c が少なくとも 1 つは存在する．

※発展

・コーシーの平均値の定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり，$a<x<b$ で $g'(x)\neq 0$ とする．
このとき

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<b)$$

となるような c が少なくとも 1 つ存在する．

☆ロピタルの定理

関数 $f(x)$，$g(x)$ が（＊）の条件を満たすとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L \text{ ならば } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

である．

条件（＊）

（条件 1）

（条件 2）

（条件 3）

ロピタルの定理には様々なバリエーションがあり、非常にややこしい．

メリット

・稀にドヤ顔できる．

デメリット

・範囲外なので，証明なしには使えない．

・頑張れば証明できるが，証明すべきバリエーションが複数あり，中には面倒なものがある．

・適用するためには条件があり，無思考で反射的に使うことはできない．

Q. 何故，指導要領範囲外であるロピタルの定理が有名なのか？

A. （稀に）ロピタルの定理で早く解答できるものがあり，ドヤ顔できるから．

Q. そもそも，大学入試で使えるのか？

A. そもそも，

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+5}{x^3+2x^2+3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sinx-tanx}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{e^x}$

☆極値について

最大値と最小値は値そのもの
極大と極小は形の問題

☆グラフの凸性

・凸関数の定義

・イェンセンの不等式（再）

☆漸近線

$y=f(x)$のグラフが $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ いずれかにおいて

「ある一定な直線」に近づいてゆくとき，その直線を漸近線という．

（求め方）

例題）次の関数の漸近線を求めよ．

(1)　$y=\dfrac{x+1}{x-1}$

(2)　$y=\dfrac{x^2}{x-2}$

(3)　$y=\sqrt[3]{8x^3-12x^2}$

※複雑な関数の符号を調べる（増減を調べるため）

・２つの関数に分けて，対決させる（玉すだれ）

・符号が判明するところまで微分して元に戻す　「(微分の微分の）……で微分を調べる」

例題）次の不等式が成り立つことを示せ.

(1) $e^x < 1 + x + \dfrac{e}{2}x^2 \quad (0 < x < 1)$

(2) $e^x > x^2 \quad (x > 0)$

(3) $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6} \quad (x > 0)$

☆関数のグラフを描くポイント

ｉ）対称性・偶関数・奇関数などの性質を利用

ii）増減と極大極小

iii）凹凸と変曲点

iv）漸近線

グラフを描くときは，微分する前に全体イメージを先に思い描く.

先に微分をすると，$\begin{cases}\text{微分は作業なので，ミスしたときに気づきにくい}\\ \text{対称性の利用などの工夫をするクセが身につかない}\end{cases}$

☆増減表の書き方（当たり前とバカにしない）