【極限 limit】

極限値は有限値に収束するか正の無限大に発散するか負の無限大に発散するか振動する．
さて．ところで，極限って？

☆極限とは

有限な道具を用いて無限を御する概念装置.

初めに厳密な取り扱いを解説しておく．**以後，大学入試においてこの概念を使用する必要性は全くない**が，普段当たり前に行なっている操作が厳密な議論に支えられていることだけ体感しておこう．こうした概念については,「高校生にも教えるべきだ」という意見と,「数学科でもない限り大学生にすら教える必要はない」という意見がある．皆さんは，どう感じるだろうか.

※「数列の収束」の厳密な取り扱い(1) $\varepsilon - N$論法（イプシロンエヌ論法）

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ⋯ 数列$\{a_n\}$は α に収束する.

nを限りなく大きくしてゆくとa_nは限りなく定数 α に近づく.

◆厳密に取り扱う.「限りなく？」「近づく？」

a_nについて　近づく　：

　　　　　　　限りなく：

nについて　限りなく大きく：

※「関数の収束」の厳密な取り扱い(2) $\varepsilon-\delta$論法（イプシロンデルタ論法）

(I) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ (II) $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ ⋯ 関数$f(x)$は{(I)$x\to\infty$ (II)$x\to a$}でαに収束する.

xを限りなく{(I)大きくしてゆく (II)aに近づけてゆく}と$f(x)$は限りなく定数αに近づく.

◆厳密に取り扱う.「限りなく？」「近づく？」

$f(x)$について　近づく　：

限りなく：

xについて　限りなく近づける：

(I) 無限大に近づくとき

(II)有限値に近づくとき

☆極限の記法

☆0 と∞と不定形

不定形であれば有限値に収束する可能性がある．つまり，収束するための必要条件として利用できる．
十分条件ではないので，不定形であるからと言って収束するかはわからない．

☆数列における収束 発散

(i)　収束……………$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$…①

(ii)　発散
- (ア)　正の無限大に発散……$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$　…②
- (イ)　負の無限大に発散……$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$　…③
- (ウ)　振動する………………その他の場合

・数列の極限に関する定理

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$が収束し$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$とする．このとき次の(1)～(4)が成立する．

(1) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$　（ただし、k は n に関係のない定数）

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$　（複号同順）

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$（ただし，$b_n \neq 0$，$\beta \neq 0$）

・不等式と極限に関する定理

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$について，

(1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$が収束し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$のとき、$a_n \leqq b_n$　$(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ならば$\alpha \leqq \beta$

(2) $\{a_n\}$，$\{c_n\}$が収束し、$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$のとき、$a_n \leqq b_n \leqq c_n$　$(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ならば$\{b_n\}$も収束し$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$である．（ハサミウチの原理）…… 直接求まらない極限を求める方法

（重要）普通には解けない漸化式の極限を求める問題は 100%ハサミウチ．
「ハサミウチ」は実質「定理」だが，高校数学では証明なしに用いるので「原理」と呼ぶらしい．

☆等比数列の極限

・$\{r^n\}$の収束・発散に関する定理

$n\to\infty$ のとき

(1) $r>1$ ：$r^n\to\infty$(正の無限大に発散)

(2) $r=1$ ：$r^n\to1$(1 に収束)

(3) $-1<r<1$ ：$r^n\to0$(0 に収束)

(4) $r\leqq-1$ ：発散(振動する)

☆無限等比級数

・無限等比級数の収束条件に関する定理

$a\neq0$のとき

(1) $|r|<1$のとき収束し、その和は$\dfrac{a}{1-r}$

(2) $|r|\geqq1$のとき発散する.

・「$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$の収束と$\lim_{n\to\infty}a_n=0$」に関する定理

無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が収束するなら$\lim_{n\to\infty}a_n=0$である.

☆関数の極限イメージ

・片側からの極限と連続性（厳密には$\varepsilon-\delta$）

・「三角関数の微積分」の基礎となる極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ （ただし，角の単位は「ラジアン(弧度)」とする）

（高校数学の極限で使う 2 公式の 1 つ目）

（証明）

※この証明は循環論法か？

☆自然対数の底 e の登場 定義は次講

例題

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ は成り立つとして，次の式を導け．

(1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\log_e(1+t)}{t}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ （高校数学の極限で使う 2 公式の 2 つ目）

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

☆「関数の連続性」についての定理

$x=a$ において，
$f(x)$，$g(x)$ が連続であるときは $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ も $x=a$ で連続であり，
さらに $g(a)\neq 0$ のときは $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も $x=a$ で連続である．
中間値の定理や平均値の定理など，関数が連続であることを前提とした定理を使用するには，当たり前だが関数が連続であることが必要になる．「当たり前なことほど」常に意識しておこう．

☆連続関数を扱う上での基礎となる定理

閉区間$[a,\ b]$で連続な関数 $f(x)$ は次の性質をもつ．

(1)最大値の定理（最大値・最小値の定理）

その区間での最大値 M および最小値 m が存在する．

(2)中間値の定理

$f(a)$と$f(b)$の間にある任意の実数k に対して，

$f(c)=k\,(a<c<b)$となる実数cが少なくとも 1 つ存在する．

☆極限の基本計算詰め合わせ

極限計算時は**必ず不定形か確認する**．そもそも不定形でなければ値を代入すればすぐ求まる．
不定形になっている時は，**不定形の解消を目指す**か，**公式と同じ形にする**．（公式の基本形は**2つだけ**）

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{n^2+3}$ (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}k^3}{n^4}$ (3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ (5) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}i^2\sum_{j=1}^{n}j^3}{\sum_{k=1}^{n}k\sum_{l=1}^{n}l^4}$ (6) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ (7) $\lim_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{2x}$ (9) $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x^\circ}$ (10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x^2}$ (11) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{sinx}$ (12) $\lim_{x\to\infty}\frac{sinx}{x}$

(13) $\lim_{x\to\pi}\frac{sinx}{x-\pi}$ (14) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+3}\right)^n$ (15) $\lim_{x\to\infty}\frac{n}{2^n}$ (16) $\lim_{x\to 1+0}(|x|+\lfloor x\rfloor)$

(17) $\lim_{x\to 1-0}(|x|+\lfloor x\rfloor)$ (18) $\lim_{x\to 2+0}\frac{x}{x-2}$ (19) $\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{x-2}$ (20) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$

(1) 0　(2) $\frac{1}{4}$　(3) 1　(4) 1　(5) $\frac{5}{6}$　(6) $\frac{1}{2}$　(7) $-\frac{1}{2}$　(8) $\frac{3}{2}$　(9) $\frac{180}{\pi}$　(10) $\frac{1}{2}$

(11) 0　(12) 0　(13) -1　(14) $e^{-\frac{3}{2}}$　(15) 0　(16) 2　(17) 1　(18) $+\infty$　(19) $-\infty$　(20) 0