【積分法 integration 多項式編】

多項式において積分法のおおまかな計算方法に慣れておこう．

総合する

受験の積分ではワンパターン問題しか出ない．

大学受験レベルの関数（初等関数）に限ると，微分可能かどうかまで含めて，簡単に微分できるが，
どんな初等関数でも簡単に初等関数の範囲で積分できるという保証はない．
従って，受験では積分できるごく一部の関数しか扱われない．
つまり，積分は易しい！！（パターンで処理できる）
逆に，微分はどんな関数の問題でも扱える．
つまり、微分は難しい（面倒臭い）！！（パターン化ではなくしっかり状況判断をする）

微分：情報を要素に分解（要らない情報は切り捨てる）　→　分析
積分：情報を要素から組み立てる（足りない情報は補う）　→　総合（統合）

☆積分とは

元の関数に対して積分された関数のことを**原始関数**という．

原始関数は一意に定まらない．

→微分で消えてしまう定数部分は神のみぞ知るものである．

積分は$\underbrace{\text{微分の逆演算（本当か？）}}_{\text{不定積分}}$であり，それによって$\underbrace{\text{面積や体積などを求める}}_{\text{定積分}}$ことができる．

☆積分の記法 / 不定積分と定積分

不定積分：

定積分　：

☆積分の基本

公式

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$　　　$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + C$

定理

(1)　$\int_a^b \{kf(x) + \lg(x)\}dx = k\int_a^b f(x)dx + l\int_a^b g(x)dx$

(2)　$\int_a^a f(x)dx = 0$

(3)　$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(4)　$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(5)　$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$　…x，tは労働者（誰を使っても仕事はできる）

(6)　$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & (f(x)\text{：偶関数}) \\ 0 & (f(x)\text{：奇関数}) \end{cases}$

☆定積分（関数）の微分

☆定積分を含む関数方程式

・積分区間に変数がない（定数のみ）

・積分区間に変数がある

☆積分の面積公式

２次 Ver.

３次 Ver.

４次 Ver.

※ベータ関数から見た一般化 Ver.

※はみ出し削り論法の面積への応用

議論に厳密さを欠く結果の暗記なので数学とは言えないが，答えを出すだけなら早い.

・基本的な考え方

・さらに単純化（どうせいい加減ならもっと速く）

・またいではさんでシコシコ

・固定幅で区間をシコシコ

・定点攻めでクルクル

（はみ出し削り論法の練習問題）

全て答えだけで良い.

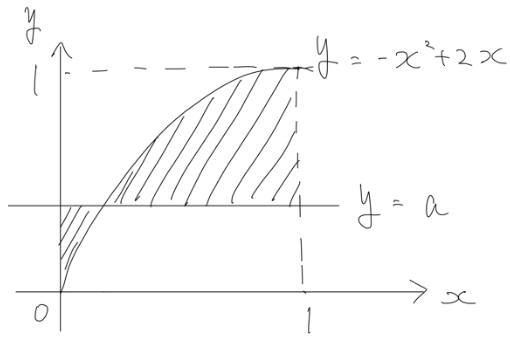
問題 1「またいではさんでシコシコ」

xy平面上の曲線 $y=-x^2+2x$ と

3 直線 $x=0$，$x=1$，$y=a$（$0<a<1$）と

で囲まれる図の斜線部分の面積をSとする.

Sの最小値とそのときのaの値を求めよ.



問題 2「固定幅で区間をシコシコ」

放物線 $y=f(x)=3x^2+3$上の点$(1,\ 6)$における接線の方程式を$y=g(x)$とし，$F(x)$を

$F(x)=\begin{cases} f(x) & (x\leq 1) \\ g(x) & (x>1) \end{cases}$によって定義する．$y=F(x)$のグラフと$x$軸および 2 直線$x=a$，

$x=a+8$とで囲まれる部分の面積を最小にするaの値を求めよ.

問題 3「定点攻めでクルクル」

$C>1$を実数とする．xy平面で，点$(1,\ c)$を通る直線lと放物線$y=x^2$で囲まれる図形の面積を最小にするlの傾きを求めよ．また，その最小面積を求めよ.

解答

問題 1

$a=\dfrac{3}{4}$のとき，最小値$\dfrac{1}{4}$をとる.

問題 2

$a=-3$

問題 3

面積を最小にするlの傾きは 2，最小面積は$\dfrac{4}{3}(c-1)^{\frac{3}{2}}$