【極座標と曲線】

極座標の概念から二次曲線やその他の有名曲線まで詰め合わせにして学んでおこう.

☆極座標 polar coordinates

特に平面の単純な極座標系は円座標 circular coordinates とも呼べる．さらに円柱座標や球座標などに拡張されるが、それはまた別のお話.

極 O、始線 OX として

$\begin{cases} OP = r \\ \angle XOP = \theta \end{cases}$ のとき　点 P の極座標は（r, θ）

直交座標は　働き者の座標
極座標は　　横着者の座標

・極座標と直交座標の変換

直交座標で（x, y）　　　　極座標で（r, θ）

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

・点と点の距離・三角形の面積

・極方程式（円，直線などを極座標で表す）

円

・$r = a$

・$r = 2a\cos\theta$

直線

・$\theta = \alpha$

・$r\cos(\theta - \alpha) = a \quad (a > 0)$

☆二次曲線 quadratic curve

Ⅰ放物線(parabola)

Ⅱ楕円(ellipse)

Ⅲ双曲線(hyperbola)

・またの名を 円錐曲線 conic curve

円錐を平面で切断すると現れる.

・円(全ての母線と交わり、底面に平行な平面で切断)

・楕円（全ての母線と交わり、底面に平行でない平面で切断）

・放物線（母線に平行な面で切断）

・双曲線（母線に平行でない平面で切断）

・二直線（軸を全て含む平面で切断）

・二次曲線 基本性質まとめ

Ⅰ　放物線

焦点と準線からのキョリが等しい.

頂点＝原点

Ⅱ　楕円

2 焦点からのキョリの和が一定.

中心＝原点

Ⅲ　双曲線

2 焦点からのキョリの差が一定.

中心＝原点

・二次曲線の接線　接点$(x_1,\ y_1)$

Ⅰ放物線

Ⅱ　楕円

Ⅲ　双曲線

※簡便な作り方

・2 次の項は

・1 次の項は

・二次曲線の極方程式による統一的表示

平面上に，直線 l とその直線上に含まれないような点 F を取る．直線 l 上で点 H を動かすとき，その直角位置上で$\mathrm{PF}:\mathrm{PH} = e:1\ (e > 0)$を満たすような点 P の集合は円錐曲線を描く．このとき，PF と PH の比 e を**離心率**といい，直線 l を**準線**，点 F を**焦点**という．
ここで，焦点 F を極とする極座標 (r,θ) を新たにとれば，動点 P の軌跡は

準線を焦点の左におくと

準線を焦点の右におくと

という極方程式によって表すことができる．r は線分 PF の長さ，θ は線分 PF が x 軸となす角度である．この式は，e と l という 2 つのパラメータを通じて，楕円，放物線，双曲線という 3 種の円錐曲線を統一的に表しているといえる．

離心率 e は，描かれる円錐曲線の概形を次のように決定するパラメータである．

$0 < e < 1$：楕円
$e = 1$　　：放物線
$e > 1$　　：双曲線

・楕円 ⇔ 円　を変換

楕円の長軸と円の半径を合わせて　縦や横に拡大縮小する.

・二次曲線の媒介変数による表示

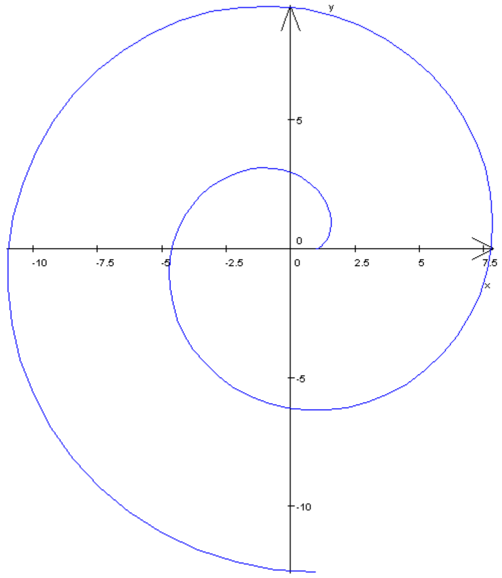
ｉ） 三角関数で表すのが基本

ⅱ） 特殊なパラメータ

☆その他の有名曲線たち　式は覚えなくて良いが，イメージだけ作っておく．

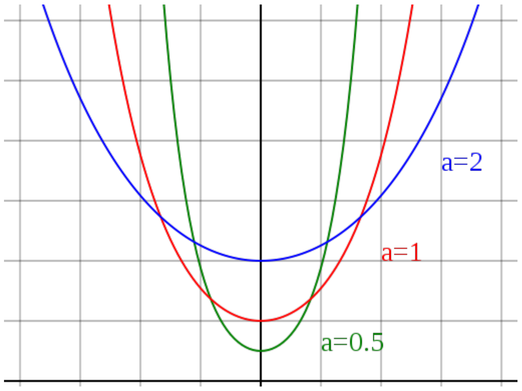
・インボリュート曲線（伸開線）

$$\begin{cases} x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \end{cases}$$



・カテナリー（懸垂線）

$$y = a\ \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = a\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)$$



※双曲線関数

$$\sinh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

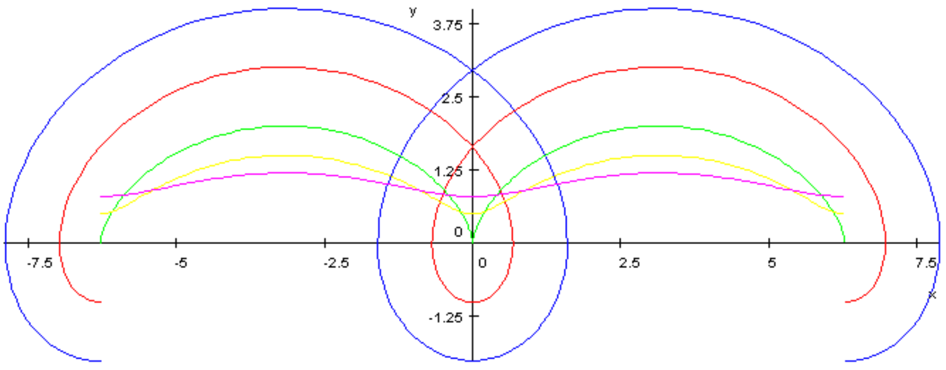
sinh, cosh をそれぞれ**双曲線正弦**関数（*hyperbolic sine*; ハイパボリックサイン), **双曲線余弦**関数（*hyperbolic cosine*; ハイパボリックコサイン）と呼ぶ．また，$(\cosh x, \sinh x)$ は，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上の点であり，$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を満たす．

・円をコロコロシリーズ

Ⅰ）直線上をコロコロ　<u>**トロコイド trochoid**</u>

直線上で円をコロコロしてできる曲線．この中に<u>**サイクロイド cycloid**</u>も含まれる．

動円（コロコロする円）の円周上に取った点の軌跡がサイクロイド．それ以外はトロコイド．



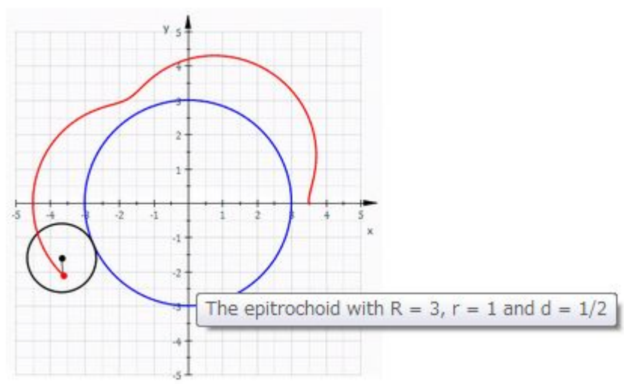
Ⅱ）円上をコロコロ

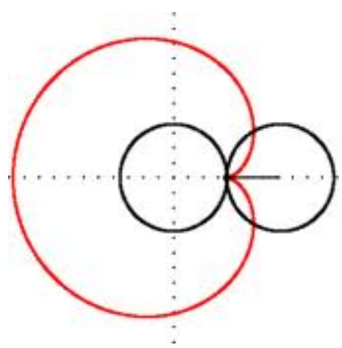
ｉ）円の外側をコロコロ　<u>**エピトロコイド（外トロコイド）epitrochoid**</u>

特に円周上に取った点の軌跡が<u>**エピサイクロイド（外サイクロイド）epicycloid**</u>

さらにコロコロする円とされる円の半径が等しい時<u>**カージオイド cardioid**</u>となる

例）外トロコイド　　　　　　　　　　　　　例）カージオイド



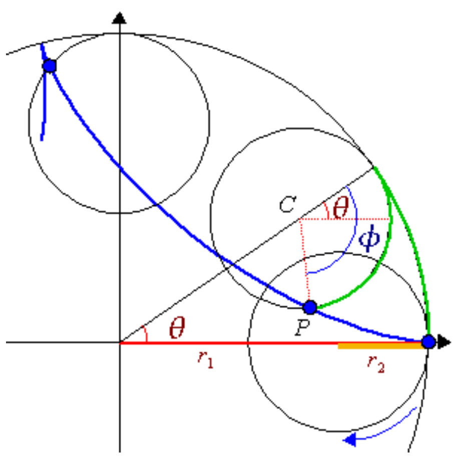


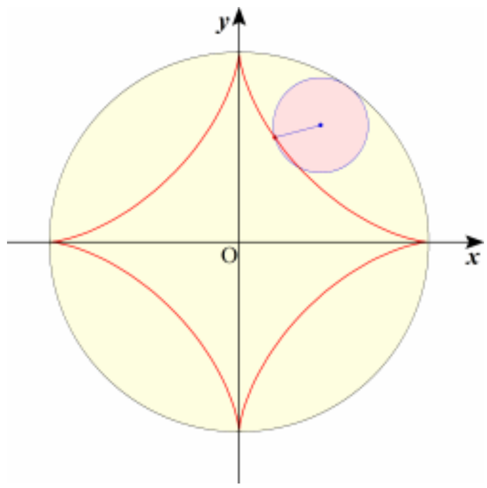
ⅱ）円の内側をコロコロ　<u>**ハイポトロコイド（内トロコイド）hypotrochoid**</u>

特に円周上に取った点の軌跡が<u>**ハイポサイクロイド（内サイクロイド）hypocycloid**</u>

さらにコロコロする円がされる円の半径の１／４の時<u>**アステロイド asteroid**</u>となる

例）内サイクロイド　　　　　　　　　　　　例）アステロイド





（発展）円をコロコロシリーズを方程式で表す

ベクトルの足し算

原点→円の中心（→円の中心→円の中心……）→求める点

式が散らかるので、列ベクトルで書く

ex.1) trochoid(→cycloid)

ex.2)epicycloid(→cardioid)

ex.3)hypocycloid(→asteroid)