【a little more about 関数】

関数とは何か．いま一度考え直し，逆関数の概念まで理解しよう．指数対数分数無理関数はおまけ．

☆関数とは

「変化と運動」 をとらえる手段

・簡単な関数の定義

2 つの変数x，yがあって，xの値を定めると，それに応じてyの値が 1 つ定まるとき，

yを「xの関数」と言い， $y=f(x)$ と書く．

x： 独立変数 　　xの範囲：定義域

y： 従属変数 　　y の範囲：値域

☆写像を理解しよう

・写像の定義

2 つの集合 X，Y$\left(\text{X と Y は同じ集合であってもよい}\right)$があって，

X の任意の要素に対して，Y の要素を 1 つずつ対応させる規則fが定められているとき，

この規則fを X から Y への写像と言い，「f:X → Y」あるいは「$\mathrm{X}\overset{f}{\rightarrow}\mathrm{Y}$」のように表す．

・簡単な写像の定義

X のどの要素に対しても Y の要素が必ず 1 つ（だけ）対応する．

・上への写像（全射）

「Y の要素に余りなし」

・1 対 1 写像（単射）

「$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$」 $\Leftrightarrow$ 「$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$」

・上への 1 対 1 写像（全単射）

「X の要素と Y の要素が完全に 1 対 1 対応」 … これが逆写像（逆関数）の存在条件

ex) $y = f(x) = x^2$ について

☆逆手流（逆像法） 再チェック

・変域チェックの流れ

自然流） 定義域 → 値域

逆手流） ある値域を満たすには元々の定義域がどうなっていればよいかを逆に考える

| 値域として考えるものは何か | を把握して、それを満たす条件を逆に考える。

①$ax^2+bx+c=0$ が実数解を持つ

②$y=ax^2+2a^2+3$ の通過領域

③$y=\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ の値域

☆合成写像と逆写像

・fしてgする $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

・fしてgするの逆 $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)$

☆逆関数

(1)xとyを入れ替えれば逆関数が求まる．
(2)逆関数においては，定義域と値域が入れ替わる．
(3)$y = f(x)$と$y = f^{-1}(x)$のグラフは　$y = x$　に関して対称となる．

・$y = f(x)$と$y = f^{-1}(x)$の交点

(I)そもそも$y = x$対称な 2 つのグラフはどこで交点を持ち得るか．

元の関数自体が単独で　　　　　　　　　　　　　な点を

(i)持たないとき
「$y = x$上のみで交点を持つ」

(ii)持つとき
「$y = x$上以外にその点も交点となる」

$y = x$ との連立で十分条件は調べられる．（まともに逆関数と連立するよりはやいことが多い）

(II)具体例

単調でないグラフ
$y = x$との連立だけでは不足

単調なグラフ
$y = x$との連立だけで十分

単調なグラフ（例外的）
$y = x$との連立だけでは不足

☆指数関数 exponential function

$M = a^m$　　a：底 $base$　m：冪$\left(べき\right)$指数 $exponent$

$\boxed{exp\text{を見た瞬間，底} > 0\text{，底} \neq 1\text{を確認}}$

・指数法則　$a > 0$，$b > 0$

前提.

$a^0 = 1$，$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$，$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，$a^m a^n = a^{m+n}$，$(a^m)^n = a^{mn}$，$(ab)^m = a^m b^m$

派生型　$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$，$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$，$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

※底を負にすると？

☆対数関数 logarithmic function

$m=\log_a M$　　a：底 $base$　M：真数 $antilogarithm$

$\boxed{log\text{を見た瞬間，底}>0\text{，底}\neq 1\text{，真数}>0\text{を確認}}$

・対数法則　$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$b\neq 1$，$c>0$，$c\neq 1$，$M>0$，N＞0

指数法則より導ける．

$a^{\log_a M}=M$，$\log_a 1=0$，$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

派生型　$\log_a M^k=k\log_a M$，$\log_a \frac{1}{M}=-\log_a M$，$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$，

底の変換（これも派生型）　$\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

さらに派生型　$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$，$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$，$\log_a b\cdot\log_b M=\log_a M$，$\log_{a^n} M=\frac{1}{n}\log_a M$

・真数の大小と底の関係

p，qは正，$a>0$，$a\neq 1$とすると

i）$a>1$のとき，$log_a p>log_a q \Leftrightarrow p>q$

ii）$0<a<1$のとき，$log_a p>log_a q \Leftrightarrow p<q$

☆指数関数・対数関数のグラフ

☆常用対数　～　Common Logarithm

底を 10 とする対数のこと．
何故こんな概念があるのか？
10 進法が日常的だから．

その他にも自然対数（natural logarithm）というものもある．

※自然対数の底は e で表し，ネイピア数（Napier's constant）

ネイピアの研究に由来し，ベルヌーイが見出し，ライプニッツが記号を割り当て，オイラーが割り当てた e という記号が広く受け入れられるようになった．定義など詳細は別講にて．
$e = 2.718281828459045\cdots$

・基数と仮数と指標

・基数 10 で正規化

最高位の数とケタ数を調べる．

i）$\mathrm{N} = 10^{\mathrm{n}+\alpha}$　とすると

ii）$\mathrm{N} = 10^{-(\mathrm{n}+\alpha)}$　とすると

ex）$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$

① 6^7

② 5^{-10}

☆分数関数・無理関数

・1 次分数関数

$$y=f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}\quad (a\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$$

原則：割りきって帯分数化　→　漸近線がわかる

$y=\dfrac{1}{x}$　は直角双曲線であり、1 次分数関数はこれを拡大縮小＆平行移動したもの.

・$\sqrt{1\text{ 次式}}$　の形の無理関数

$$y=f(x)=\sqrt{ax+b}$$

原則：くくって基本形に　→　形がわかる

$y=\sqrt{x}$は 2 次関数の逆関数として求まり，これを拡大縮小＆平行移動すればこの形になる.