【複素平面（複素数平面）：complex plane】

平面を扱う手法としてとても優秀な複素数にいち早く慣れておこう.

☆ i とは何か？（虚数単位：imaginary unit）

それ自体はただの記号的表現にすぎない.

(1)　$i=\sqrt{(-1)}$ と解釈する.

(2)　$I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ という 90°回転の行列の略記と解釈する.

(3)　図形を 90°回転するという意味そのものの略記と解釈する.

☆複素数とは

$$z=a+bi \quad (a,b\in\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} b=0 & \text{のとき}\quad z=a\\ b\neq 0 & \text{のとき}\quad z=a+bi\\ b\neq 0\wedge a=0 & \text{のとき}\quad z=bi\end{cases}$$

実部と虚部で２つの実数の順序つきペアを作る　→　平面に対応

実数＝　　数直線

複素数＝　数平面

☆複素数の計算規則

Ⅰ)相等

$$a+bi=c+di \quad\Leftrightarrow\quad a=c\wedge b=d$$

特に$a+bi=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=b=0$

Ⅱ)＋－×÷（四則演算）

＋　：　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

－　：　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

×　：　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

÷　：　$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$　（ただし　$c^2+d^2\neq 0\Leftrightarrow c\neq 0\vee d\neq 0$)

※計算のポイント

① $\sqrt{\ }$の中のマイナスは即 i に。（$\sqrt{\ }$の計算はi を追い出してから）

② i^2 は即 -1 に

③ i を文字とみなして計算

・一般にa, b について

ｉ）$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{ab} & (a < 0 \land b < 0) \\ \sqrt{ab} & (\text{それ以外}) \end{cases}$ ※1

ⅱ）$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{b}{a}} & (a < 0 \land b > 0) \\ \sqrt{\dfrac{b}{a}} & (\text{それ以外}) \end{cases}$ ※2

※1

※2

①を徹底すれば大丈夫！！

☆虚数の大小？

一般に大小関係についてわれわれが知っている公理は実数についてのみ成り立つ。

（検証）

（参考）複素数に大小はないのか？（受験には関係ないよ）

順序関係はある　① 右にあるほど　大

② 左右同じなら上にあるほど　大

☆共役

$z = a + bi$ に対して

$\bar{z} = a - bi$（虚部の符号逆転） … 「　　　　　　　　　　」

を z の「共役複素数」という。

(1) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$

(2) $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$（複号同順）

(3) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$

(4) $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)$ $(\beta \neq 0)$

(5) $\overline{\alpha^n} = (\bar{\alpha})^n$

☆実部・虚部の表示

(1)実部　$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

(2)虚部　$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

☆実数・虚数の条件

(1)「z は実数」⇔ $z = \bar{z}$

(2)「z は純虚数」⇔ $z + \bar{z} = 0 \wedge z \neq \bar{z}$　あるいは $z + \bar{z} = 0 \wedge z \neq 0$

☆複素数の絶対値

$z=a+bi$　の絶対値は

ｉ）$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ と定義する

　これは実数の絶対値の概念も含む

ⅱ）$|z|^2=z\cdot\bar{z}$ と定義することもできる

$(a+bi)\,(a-bi)=a^2+b^2$

(1)　$|\alpha|=|\bar{\alpha}|$

(2)　$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

(3)　$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

(4)　$|\alpha^n|=|\alpha|^n \quad (n\in\mathbb{N})$

☆座標平面（デカルト座標系）から複素平面（ガウス平面）へ

順序つきの２実数のペア　…　(a,b) があれば、平面は扱える

$\begin{cases}\text{横軸＝実軸}\\\text{縦軸＝虚軸}\end{cases}$ として複素数を座標と対応させる.

グラフを描くときはx軸＝実軸、y軸＝虚軸とする.

複素平面のメリット：ただの数（の表現）で２次元情報が扱える！

(1)＋：ベクトルの足し算

(2)－：ベクトルの引き算

(3)実数倍：ベクトルの伸縮

☆複素数の表示形式

直交形式 $z = a + bi$

極形式 $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\left(= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta)\right)$

$|z| = r$ として極座標(r, θ)と対応

またこのとき、$arg\,Z = \theta$と表し、θは Z の偏角という。

☆複素数の積

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{cases}$$ とすると

$z_1\ z_2$＝

また

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = \\ \arg(z_1 z_2) = \end{cases}$$

☆複素数の商

$$\frac{z_1}{z_2} =$$

また

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \\ \arg\dfrac{z_1}{z_2} = \end{cases}$$

☆$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$の利用

ｉ）α, β, γ が一直線上

$$\Leftrightarrow \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} =$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が

ⅱ）2 直線　α, β,　α, γ　が直交

$$\Leftrightarrow \arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} =$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が

☆ド・モアブルの定理

$$(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta \ (n \in \mathbb{Z})$$

「　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　」＝「　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　」

（ド・モアブルの定理を$n \in \mathbb{Z}$の範囲で証明）

① $n \in \mathbb{N}$ として帰納法
② $n = 0$ として成立を確認
③ n を負の整数として$n = -m(m \in \mathbb{N})$とおき、ｉ)を利用

☆二項方程式（円分方程式）

$z^n = 1$ を解く

例）$z^3 = 1$

☆複素数はほぼベクトル

ベクトルや座標で使う公式はほぼ使える

・分点公式

2点 $A(\alpha), B(\beta)$ を $m:n$ に分ける点を$P(z)$ として

$z=$

・直線の表示

2点 $A(\alpha), B(\beta)$ を通る直線上の点を$P(z)$ として

$z=$

方程式っぽくしたければ、座標の方程式に

$$\begin{cases} x=\dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \\ y=\dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

を代入すればよい.

・円の表示

中心 $A(\alpha)$, 半径r の円上の点を$P(z)$ とすると

・軌跡・領域

直交形式に直して座標計算すれば確認できるが，複素数としての意味の解釈だけで使えるようにしておくことが大切.

例１）垂直２等分線

例２）アポロニウスの円

例３）△内部の点

例 4）不等式で表された領域

☆複素平面上の写像（変換）

例えば$\begin{cases} w=\bar{z} \\ w=\alpha z+\beta \\ w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \\ w=z^2 \end{cases}$ みたいな感じで　$z \to w$　に変換することを考える.

1）合同変換　2）等形変換　3）一次分数変換　4）その他

1）合同変換（合同なままうつす）

・平行移動

・回転移動

・線対称移動

2）等形変換（等形なまま伸縮してうつす）

・相似変換

・相似回転

※変換において z を $\bar{z}$ とすると元の図形 x 軸に対してひっくり返すことになるので，等形であっても裏返し（鏡像）になる．

3）一次分数変換　$w=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$

手順を分解して考える.

◎逆数をとる変換について

「反転」

平面上の定点 C に対し，$\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}=r^2\ (r>0)$ となるように任意の点 P を Q にうつす変換を反転といい, C を反転の中心, r を反転の半径, C を中心とした半径 r の円を反転の円という.

※原点中心の単位円に関する反転

「反転」まとめ

①　直線を　自身上の点　　　を中心として反転すると，元の直線自身になる．
②　直線を　自身上にない点　を中心として反転すると，その中心を通る円になる．
③　円を　　自身上の点　　　を中心として反転すると，その中心を通らない直線になる．
④　円を　　自身上にない点　を中心として反転すると，その中心を通らない円になる．

※複素平面において，直線の式と円の式は同じ．

4）その他　$w=z^2$ など

状況に応じて計算する．
極形式か直交形式に直してのゴリ押し計算が多い．

☆複素数・複素平面まとめ

・できるだけ複素数の性質を利用してそのまま計算する.

・どうしても無理なら直交形式か極形式に直して座標計算に持ち込む.

・一見複素数の問題に見えない「平面幾何」の問題を複素平面に持ち込むのも有効.

※平面の取り扱い方法

平面の問題をいずれの方法で解くべきか，いつも相互に対応を考えるクセをつける.
どれがラクか？