【確率】

場合の数という素朴な感覚から確率へと概念を拡張しよう．

☆確率前夜

・パスカルとフェルマーが解決した分配問題

A，B 二人で，繰り返しコインを投げて，先に表が 3 回出たら A の勝ち，裏が 3 回出たら B の勝ちとして，勝者は賞金を全額獲得する．いま，表が 2 回裏が 1 回の時点でガサ入れのため勝負を中断した．このとき，確率的に賞金を公平に分配するなら，どのような割合で分配すべきか．

・ライプニッツですら誤った

サイコロを 2 個投げるとき，和が 12 になる確率と 11 になる確率は，どちらもその出方は 1 通りしかないため等しく，和が 7 になる確率は出方が 3 通りあるのでその 3 倍である．

☆確率論の構成

・古典的確率

・統計的確率

・公理的確率

☆確率のイメージ

・離散的

・連続的

☆確率の素朴な導入

(1) 賭博は「勝つ」or「負ける」の2通りだから，勝つ確率は$\frac{1}{2}$？

(2) 天気予報で降水確率が0%だと絶対に雨は降らない？

(3) コインを投げて表が出る確率は$\frac{1}{2}$？

例0

kの目が出る確率がp_kのサイコロを2人の人が1回ずつ振り，出た目の大きい方が勝ち，同じなら引き分けとする．このとき，引き分けになる確率を最も小さくするp_kを求めよ．

・大原則

「　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　」

見た目上の指標と事象を混同しない．

確率は「　　　　　　　　　　　」で計算する

☆確率を理解するための用語

・集合の記法

集合：もののグループ　大文字イタリックで表すことが多い
元（ゲン）：集合の要素
部分集合：集合 A の元が全て集合 B に属するとき，A は B の部分集合である．
（注）空集合はあらゆる集合（空集合自体も含む）の部分集合と定義する

元 a，b，c，… からなる集合は $\left\{a,\ b,\ c,\ \cdots\right\}$ と表す．

参考　条件式で定義する場合は $\left\{x \mid x^2-5x+6=0,\ x\in\mathbb{R}\right\}$ などと表す．

和集合：いくつかの集合の元を全て集めてできる集合を和集合と呼び，$A\cup B\cup C\cdots$ と表す．
積集合：いくつかの集合に共通に属する元全体からなる集合を積集合と呼び，$A\cap B\cap C\cdots$ と表す．
差集合：集合 A から別の集合 B に属する元を全て取り去った残りの集合を差集合と呼び，$A-B$ と表す．
補集合：ある集合Ωを固定して，その部分集合のみを考えるとき
集合 A に対して $\Omega-A$ となる集合のことを A の補集合と呼び，$\bar{A}$（A^c）と表す．

・試行

偶然に支配されて結果が変動する行い．

・事象

ある試行において結果が変動するとき，その結果として考えうるものを根元事象と呼び，試行の結果は根元事象から選択され与えられるとみなす．根元事象は素朴な感覚で言うならば，それ以上区別できない事象の一つ一つである．

・根元事象　試行の結果を与える（選択する）根元となる事象．
・標本空間Ω　ある試行に対する全ての根元事象を要素とする集合．
・事象　ある試行に対する根元事象を寄せ集めたもの（標本空間の部分集合）．
・全事象 U　起こりうる結果全体を表す集合（Ω自身によって定まる集合）．必ず起こる．
・空事象 ϕ　空集合によって定まる事象．決して起こらない．
・余事象 ‾　事象 A の補集合によって定まる事象．A が起こらない．　$\overline{\mathrm{A}}$
・和事象 ∪　2 つの集合の和集合によって定まる事象．A,B の少なくとも一方が起こる．　$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$
・積事象 ∩　2 つの集合の積集合によって定まる事象．A,B が同時に起こる．　$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$
・排反事象　2 つの事象の積事象が空事象のとき，互いに排反．A と B は同時に起こらない　$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\phi$

・指標

ある試行において，根元事象のうち注目している側面のことを指標と呼ぶ．

・確率事象

指標に関連した概念のみで言い表すことができる事象．
色に注目しているとき，数字は色とは関連がない．
確率事象は指標に応じるが，あくまで根元事象の部分集合として表す．

☆「確率」の定義

（確率空間の設定）

1 つの集合Ωを設定し，その元を根元事象と呼び，その部分集合を事象と呼ぶと，事象は全て確率事象となり，確率事象 E には以下を満たすようにその確率 P(E)を対応させることができる．

$0 \le P(E) \le 1$

$P(\Omega) = 1$

$E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

数学的には，こうして設定した確率空間Ωの中で，確率が定義される．

Ωは有限離散集合とは限らない．有限無限，離散連続によらず設定できる．

（もう少し素朴な定義）

ある事象が起こることが期待される割合．測った大きさ（面積など）の比ととらえる．

その要素の 1 つ 1 つの起こりやすさ（大きさ）が「同様に確からしい」とき，

（つまり根元事象として集合の元の個数を数えているとき）

事象 A の大きさを|A|あるいは n(A)と表せば，

事象 A の起こる確率 P(A)は　$\mathrm{P(A)} = \dfrac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} = \dfrac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n}(\Omega)}$　である．

例えば、$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$ なら $\mathrm{P(A)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

例 1

大小 2 つのサイコロを投げるとき、次の確率を求めよ．

(1) 目の和が 7 になる確率.

(2) 目の和が 7 以上になる確率.

☆基本定理

・加法定理

・確率についての基本性質のうちの 1 つ（確率空間の設定）

$E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F) \cdots$ 確率の「加法定理」

・排反でない事象の和事象の確率は「包除原理」による

$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

・余事象の定理

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$

・ド・モルガンの定理（法則）

$P(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})\,, P(\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}) = P(\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}})$

例 2

赤球が 5 個、白球が 4 個入った袋から同時に 3 個の球を取り出すとき、次の確率を求めよ。

(1) 取り出した 3 球が同じ色である確率。

(2) 少なくとも 1 球が白球である確率。

例 3

$P(\mathrm{A}) = 0.5\,, P(\mathrm{B}) = 0.3\,, P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.2$ のとき、次の事象の確率を求めよ。

(1) $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$　(2) $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$　(3) $\overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

・乗法定理（条件付き確率）

・条件付き確率

A が起こったときの B の条件付確率を$P_A(\mathrm{B})$ないし P(B|A)と表す※教科書の表記は$P_A(\mathrm{B})$だが，一般には．P(B|A)

$$P_A(\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}$$

・乗法定理

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})P_A(\mathrm{B})=P(B)P_B(A)$$

例 4

n本中a本($0<a<n$)の当たりくじがあるくじ引きで，引いたくじはもとに戻さない場合，1 番目に引く人と 2 番目に引く人との当たりくじを引く確率が等しいことを示せ．

・ベイズの定理（原因の確率）

$$P_Z(\mathrm{X}_i)=\frac{P(X_i)P_{X_i}(Z)}{P(\mathrm{Z})}=\frac{P(X_i)P_{X_i}(Z)}{\sum_{k=1}^{n}P(X_k)P_{X_k}(Z)}$$

『私は病気であるかないかのいずれかであるが，私の症状を考えると，私が病気である確率は 0.7 である．』この記述を認めるか否か．

※ベイズの定理の意義（条件付き確率と何が違うのか）

例 5

同一の製品を作っている A, B, C の 3 つの機械がある。A, B, C は全製品のそれぞれ 30%, 20%, 50%を生産し、A,B,C の製品の不良品の割合は、それぞれa%, b%, c%であるとする。いま、全製品の中から 1 個の製品を取り出したとき、それが不良品であったという。この製品が A の機械から生産された確率を求めよ。

例 6「検診の例題」

ある疾病について検診を実施した．この疾病に罹患している割合は 0.0001 とされている．この検査においては罹患している人は 99%の割合で陽性となり，罹患していない人も 1%の割合で陽性となる．いまある人がこの検査を受けて陽性反応が出たとき，この疾病に罹患している確率を求めよ．

例 7「モンティ・ホール問題」

「プレーヤーの前に閉まった 3 つのドアがあって、1 つのドアの後ろには景品の新車が、2 つのドアの後ろには、はずれを意味するヤギがいる。プレーヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。プレーヤーが 1 つのドアを選択した後、司会のモンティが残りのドアのうちヤギがいるドアを開けてヤギを見せる。

ここでプレーヤーは、最初に選んだドアを、残っている開けられていないドアに変更してもよいと言われる。プレーヤーはドアを変更すべきだろうか？」

☆独立(反復)試行

2 つの試行が互いの結果に影響を及ぼさないとき，これらの試行は独立であるという。
2 つの試行が互いの結果に影響を及ぼすとき，これらの試行は従属であるという.

次の試行は独立か従属か.
n本中a本($0<a<n$)当たりがあるくじ引きで引いたくじは戻さない場合の 1 回目の試行と 2 回目の試行.

大小 2 つのサイコロを同時に投げるとき，大きなサイコロについての試行と小さなサイコロについての試行.

・独立試行の確率

独立な試行を複数行った場合，各々の事象が起こる確率が他の試行の結果（条件）によらないため，
$P(A)=P_B(A)\,,P(B)=P_A(B)$ のように条件によらず確率が一定となる．よって，
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

・反復試行の確率

1 回の試行で事象Aの起こる確率がpである独立試行で試行をn回繰り返すとき、r回Aが起こる確率は

$${}_nC_r p^r(1-p)^{n-r}$$

である。

例 8
4 個の答の中から 1 個を選ぶ問題が 10 個ある．これを無作為に答えるとき，正解がr個得られる確率を
P_rとする．
(1) P_rを求めよ．
(2) $r=0$，1， 2， …，9 のとき$P_{r+1}>P_r$となるのはどんなときか.
(3) P_rが最大となるのはrがどのような値のときか.

☆練習問題 1 事象のシンボル化 & 一般化してΣ（シラミツブシ）

3 人がじゃんけんで 1，2，3 番を決める．ちょうど，n回目で 3 人の順位が確定する確率を求めよ．

ただし，3 人とも，グー，チョキ，パーを出す確率はすべて$\frac{1}{3}$とする．

☆練習問題 2 条件付き確率 ＆ 情報整理（全体像の把握）

2 つの箱 A，B があり，A には赤玉 4 個と白玉 1 個，B には赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている．サイコロを投げ，1 の目が出れば A，他の目が出れば B を選び，選んだ箱から玉を 1 個取り出す．最初，赤玉が取り出されたとする．取り出した赤玉を元に戻さずにもう一度サイコロを投げて同様な試行を行うとき，次も赤玉が取り出される確率を求めよ．

☆練習問題 3 確率漸化式の基礎

数字 1，2，3 をn個並べてできるn桁の数全体を考える．この中から任意の数を選んだときに，1 が奇数個含まれている確率を求めよ．

☆練習問題 4 ランダムウォーク

(1) コインを投げて表が出たら $+1$ 点，裏が出たら -1 点の点数を得るゲームをする．
このとき，n 回コインを投げて得点が m 点である確率を求めよ．
ただし，最初の点数は 0 とする，

(2) 最初を除き，得点が 0 以下になるとゲーム終了となる条件を追加する．このとき，$2n$ 回目にゲーム終了となる確率を求めよ．（難）

☆難しすぎませんか、これ?(頻出じゃない難しいやつ)

・巴戦

A，B，C の 3 人が以下のルールで 2 人ずつ対戦して優勝者を決める．
・第 1 試合は A と B が対戦することは決まっている．
・次は，その試合の勝者と待機していた人が対戦する．
・これを繰り返し，誰かが 2 連勝したら，その人の優勝とする．
各試合において引き分けはないとして，次の場合に A が優勝する確率を求めよ．

(1) 全ての対戦においてそれぞれが勝つ確率が$\frac{1}{2}$である場合

A，B，C の 3 人が以下のルールで 2 人ずつ対戦して優勝者を決める．

・第 1 試合は A と B が対戦することは決まっている．

・次は，その試合の勝者と待機していた人が対戦する．

・これを繰り返し，誰かが 2 連勝したら，その人の優勝とする．

各試合において引き分けはないとして，次の場合に A が優勝する確率を求めよ．

(2) A が B に B が C に C が A に勝つ確率はそれぞれ$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$である場合

・破産の確率

所持金n万円の状態で以下のゲームをする．

ルール：勝ったら 1 万円得ることができ，負けたら 1 万円を失う．勝つ確率はp $(0 < p < 1)$である．所持金が目標金額N万円になればゲームを終了するが，途中で所持金が 0 円になってもゲームは終了する．このとき，所持金が 0 円になって破産する確率を求めよ．

・ポリア（ポイヤ）の壺

壺に赤玉が a 個，白玉が b 個入っている．この壺から玉を 1 個取り出して元に戻し，さらに取り出した玉と同じ色の玉を c 個壺に加える．この試行を n 回繰り返す．n 回目に赤玉が取り出される確率は，nによらず

$$p_n = \frac{a}{a+b}$$

となることを示せ．

※期待値とは

確率変数にその確率を乗じたものの総和を期待値という．たとえば，コインを投げて表が出ると$+2$点，裏が出ると-1点の得点が得られるとすると，コインを1回投げた時の点数の期待値は

$$+2\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

である．確率においては平均と呼ばれることも多い．

期待値の加法性

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

例題

サイコロを振って1の目が出たら3万円獲得し，それ以外の目が出たら1万5千円失うゲームをする．
サイコロを10回振ったときの所持金の期待値を求めよ．最初の所持金は0円とし，所持金は負も許すとする．

例題

赤，青，黄，緑の4色のカードが5枚ずつ計20枚ある．この中から3枚を一度に取り出すとき，3枚の中にある赤いカードの枚数の期待値を求めよ．

・コンプガチャ（クーポンコレクター）問題

あるスマホアプリゲームにおいて，r種類$(r \geq 2)$のレアカードが等確率で1枚ゲットできるガチャが1回300円で回せる．全種類コンプリートするまでにかかる金額の期待値を求めたい．

(1) $r = 2$のとき，n回目までで全種類コンプリートしている確率を求めよ．

(2) (1)の考え方を用いて，$r = 3$のとき全種類コンプリートまでのガチャに必要な金額の期待値を求めよ．

あるスマホアプリゲームにおいて，r種類$(r \geq 2)$のレアカードが等確率で 1 枚ゲットできるガチャが 1 回 300 円で回せる．全種類コンプリートするまでにかかる金額の期待値を求めたい．

(3) 確率 p $(0 < p < 1)$で起こるある事象が初めて起こるのがX回目であるとき，Xの期待値を求めよ．

(4) $r = 24$ のとき全種類コンプリートまでのガチャに必要な金額の期待値を求めよ．

ただし，(4)に限り，計算機を用いて良い．割り切れない場合，有効数字 4 桁に丸めよ．

・最適戦略

A，B の二人がじゃんけんをして，グーで勝てば 3 歩，チョキで勝てば 5 歩，パーで勝てば 6 歩進む遊びをしている．1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値を E とする．

(1) B がグー，チョキ，パーを出す確率がすべて等しいとする．A がどのような確率で，グー，チョキ，パーを出すとき，E の値は最大となるか．

(2) B がグー，チョキ，パーを出す確率の比が $a : b : c$ であるとする．A がどのような確率で，グー，チョキ，パーを出すならば，任意のa，b，cに対し $\mathrm{E} \geq 0$ となるか．