【場合の数】

場合の数の基本概念を整理して，よく使う数え方のパターンまで整理しよう．

☆基本法則

・和の法則

例 1

1 から 100 までの自然数のうち，3 でも 5 でも割り切れないものの個数を求めよ．

・積の法則

例 2

108 の約数は全部で何個あるか．またその総和はいくらか．

☆順列いろいろ

・順列(Permutation)

例 3

男 4 人，女 4 人が横に 1 列に並ぶとき

(1) 並び方は全部で何通りあるか.

(2) 男女が交互に並ぶ並び方は何通りあるか.

(3) (2)の場合，特定な男 1 人と女 1 人とが必ず隣りあうような並び方は何通りあるか.

・重複順列

例 4

集合{a,b,c,d}の部分集合(空集合と全体集合を含む)の個数を求めよ.

・同じものが存在するタイプの順列

※「セット割り理論」……ダブりを割るってどういうこと？

例 5

combination の文字すべて用いて作った順列について次の問いに答えよ．

(1) 異なる順列の総数を求めよ．

(2) 2 つある i のうち，一方が偶数番目に，他方が奇数番目にある順列の数を求めよ．

・順序（大小）に制限のある順列

例 6

トランプのカードがダイヤ，クラブ，ハートそれぞれ 2，3，4 の 3 枚ずつ計 9 枚ある．この 9 枚のカードを左から右に順に並べる時，同じマーク（ダイヤ，クラブ，ハート）どうしのカードは必ず 2，3，4 の順でなければならないとすると，そんな並べ方は何通りあるか．

・円順列

※同じものがあるときは注意.「　　　　　　　　　　　　　　　　」してからダブリチェック

バーンサイドの補題という便利な考えもあるが，受験においては地道にパターン分けして調べるのが無難

例 7
白玉 6 個，赤玉 3 個，合計 9 個の玉を円形に並べる方法は何通りあるか.

・数珠（じゅず）順列

例 8

全て異なる色の玉 5 個を糸に通して数珠にする方法は何通りあるか.

例 9

赤玉 2 個白玉 4 個青玉 1 個を糸に通して数珠にする方法は何通りあるか.

☆組合せいろいろ

・組合せ(Combination)

例 10

(1) 凸 n 角形の対角線は何本あるか.

(2) 6 人を 2 人ずつ 3 つのグループに分ける仕方は何通りあるか.

・ ${}_nC_r$ にまつわる公式

i) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

ii) ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$

iii) $n\,{}_{n-1}C_{r-1} = r\,{}_nC_r$

※全て計算で示せるが，意味を考えて説明をつけておく.

・重複組合せ(Homogeneous Product 同次積)

（応用）

・ 和が n となる不定方程式の整数解の個数について

(i) $x_1+x_2+\ldots+x_k=n \quad (x_1,\ldots,x_k$は自然数$)$

(ii) $x_1+x_2+\ldots+x_k=n \quad (x_1,\ldots,x_k$は非負整数$)$

の２タイプがある.

(i)

(ii)

例 11

x, y, z, uについての方程式

$$x + y + z + u = 10$$

について次の問いに答えよ.

(1) 文字が全て 0 または正の整数のとき，解は何通りあるか.

(2) 文字が全て正の整数のとき，解は何通りあるか.

例 12

0 以上の整数x, y, zについて

$$x + y + z \leqq 10$$

が成り立つとき，解は何通りあるか.

（参考）

・　和が n となる r 個の自然数の順序を問わない組合せ

自然数 n を r 個に分割するときは、簡単な公式は存在しない.

→地道に考えること！

例 13

自然数 7 を 3 つに分割したときの組合せの数を求めよ.

☆二項定理と多項定理

・二項定理(Binomial Theorem)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k$$ の形も重要（具体的な計算で頻出）

例 14

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {}_nC_k$ を求めよ.

・多項定理(Multinomial Theorem)

・多項係数

例 15

$(x^2+\dfrac{4}{x^2}-4)^5$ の展開式における x^4 の係数を求めよ.

☆場合の数を数える（基礎理論）

・辞書式順序(Lexicographical Order, Dictionary Order)

例 16
A, B, C, D, E, F 6 文字を全て使ってできる順列において FBCDAE は辞書式順序で数えて何番目になるか.

・MECE(Mutually Exclusive and Collectively Exhaustive)

・樹形図(Tree, Tree Diagram)

例 17

0，1，2，3 を並べてできる 4 桁の整数は何個あるか.

例 18

オオカミ 4 匹，ヒツジ 4 匹の計 8 匹を 1 つのオリに入れる．オオカミとヒツジが同数ならヒツジは食べられないが、オオカミの数の方が多くなるとヒツジは食べられる．このとき，ヒツジが食べられないようにオリにこの 8 匹を 1 匹ずつ入れる入れ方は何通りあるか.

☆場合の数を視覚化する（情報を簡略化して圧縮する）

・ベン図

・（カルノー的な分類）カルノー図 / ベイチ図

・キャロル図

☆余事象の取扱説明書

・包除原理（包含と排除の原理）

・「少なくとも……」は余事象が本体（数えやすい）

例 19
サイコロを n 回振ったとき，以下の目の出方の場合の数を求めよ．
(1)少なくとも 1 回 1 が出る．
(2)出た目の最大値が 5 である．

・ベン図 VS カルノー図

例 20

サイコロを n 回振ったとき，出た目の最小値が 2 で最大値が 5 であるような目の出方の場合の数を求めよ．

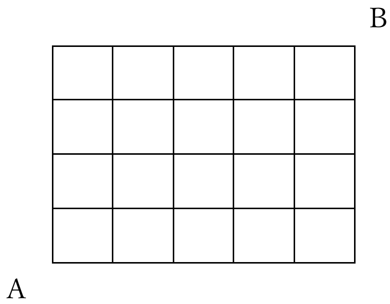
☆動く点を捕まえろ

・最短経路数（「シラミツブシ」か「MECE トラップ」で捕まえる）

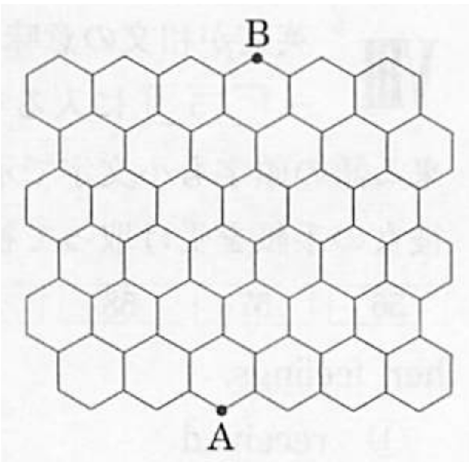
例 21

次の図において，A から B に到達する最短経路の場合の数を求めよ．

(1)



(2)



・変域制限あり（時間軸をとり平面で視覚化「境界線を見張れ」）

例 22

A，B の 2 人がジャンケンをして勝ち数に 3 つ差がついたら勝敗が決まるとする．5 回ジャンケンをして勝敗がつかない場合の数は何通りあるか．ただし，ジャンケンの手は区別せず，勝ちと負けとあいこの結果のみを考える．

・「MECE トラップ」を最初か最後に仕掛けて漸化式

例 23

10 段の階段を 1 段もしくは 2 段ずつのぼるとき，のぼり方の場合の数は何通りあるか．

☆難しすぎませんか、これ？（頻出じゃない難しいやつ）

・カタラン数をいざ語らん　その１（概要説明）

・カタラン数をいざ語らん　その 2（理論解説）

・包除原理（包含と排除の原理）を一般化する

例 24
$aabbccdd$の文字を一列に並べるとき，同じ文字が少なくとも 1 箇所で隣り合うような並べ方は何通りあるか.

・完全保存版！　撹乱（かくらん）順列 / 完全順列 / モンモール数

※数が少ない時は「　　　　　　　」を作って考える．

例 25
A，B，C，D，E の 5 人がレストランのフロントでコートを預けたとき，帰りに 5 人とも違う人のコートを渡される場合の数を求めよ．

※一般化されると「　　　　　　　　　」では対応できないので，「　　　　　　　　　」を立てる．

例 26

n人の人がプレゼント交換をして，誰も自分のプレゼントを受け取らないような交換の仕方をa_nとする．

(1) a_1，a_2 を求めよ．

(2) a_n，a_{n-1}，a_{n-2} について成り立つ関係式 を求めよ．

(3) a_n を求めよ．

例 26(3)（続）

$a_1 = 0$，$a_2 = 1$，$a_n = (n-1)(a_{n-1} + a_{n-2})$　$(n \geqq 3)$　を解く．

※難しい！

解 1）超絶式変形で漸化式を解く．

解 2）しんどいけど地道で確実な方法で漸化式を解く．

解 3）意味を考えて集合の原理から計算する．（漸化式を解かない）

解 1）

解 2）

例 26(3)（続）

解 3）包除原理から導く.